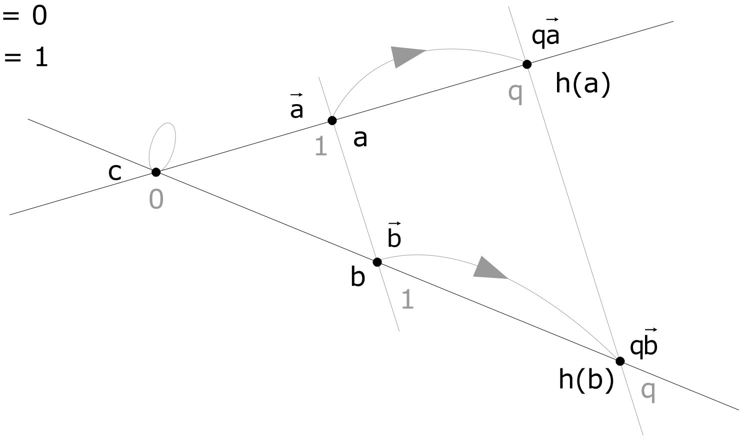
Hoofdstuk 10: Homothetieën

1. Definitie homothetie met rationale verhouding

- **Definitie:** Een homothetie h met centrum c en rationale verhouding q is een transformatie van π waarbij
  - het centrum c zichzelf als beeld heeft,
  - het beeld van een willekeurig punt x bepaald wordt door het punt met abscis q waarbij
    - abscis c = 0
    - abscis x = 1



- Een homothetie is een transformatie van π, bijgevolg vertrekt in elk punt van π slechts één pijl naar een ander punt van π.
- Aangezien een transformatie wordt aangeduid door een kleine letter, schrijft men homothetie h.
  - **Notatie:** h(c,q) (Lees: homothetie h met centrum c en verhouding q)
  - **Notatie:** h_c (Lees: homothetie h met centrum c)
- Het punt waar de pijl aan komt noemt en het beeld door de homothetie.
  - **Notatie:** h(x) = q

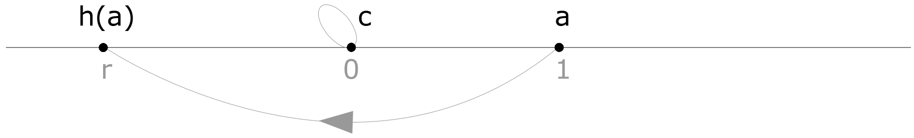
2. Uitbreiding van de homothetieën

- **Definitie:** Een homothetie h met centrum c en reële verhouding r is een transformatie van π waarbij
  - het centrum c zichzelf als beeld heeft,
  - het beeld van een willekeurig punt x bepaald wordt door het punt met abscis r waarbij
    - abscis c = 0
    - abscis x = 1
- Alle eigenschappen van de homothetieën met rationale verhoudingen zijn geldig bij de homothetieën met reële verhoudingen.

3. Positieve homothetie, negatieve homothetie

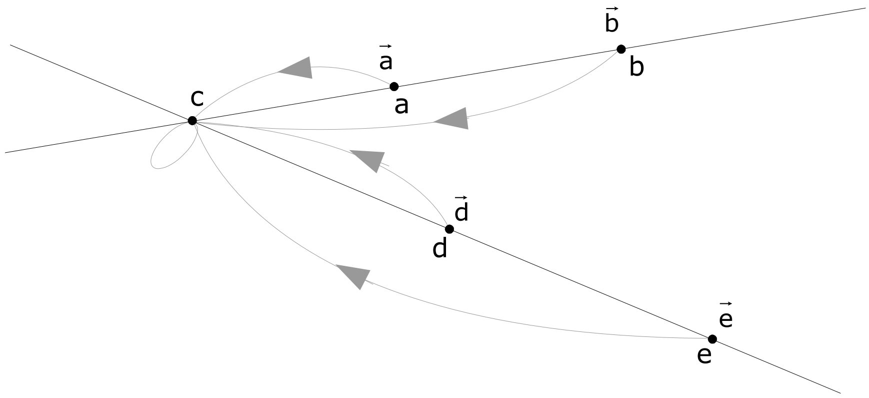
- **Definitie:** Een homothetie h met centrum c en een positieve reële verhouding r noemt men een positieve homothetie.
- Bij een positieve homothetie liggen een punt en zijn beeld steeds aan dezelfde kant van het centrum c.
- Wanneer bij een homothetie een punt en zijn beeld aan dezelfde kant van het centrum gelegen zijn, dan is de homothetie een positieve homothetie.

- **Definitie:** Een homothetie h met centrum c en een negatieve reële verhouding r noemt men een negatieve homothetie.
- Bij een negatieve homothetie liggen een punt en zijn beeld steeds langs weerszijden van het centrum c.
- Wanneer bij een homothetie een punt en zijn beeld langs weerszijden van het centrum gelegen zijn, dan is de homothetie een negatieve homothetie.

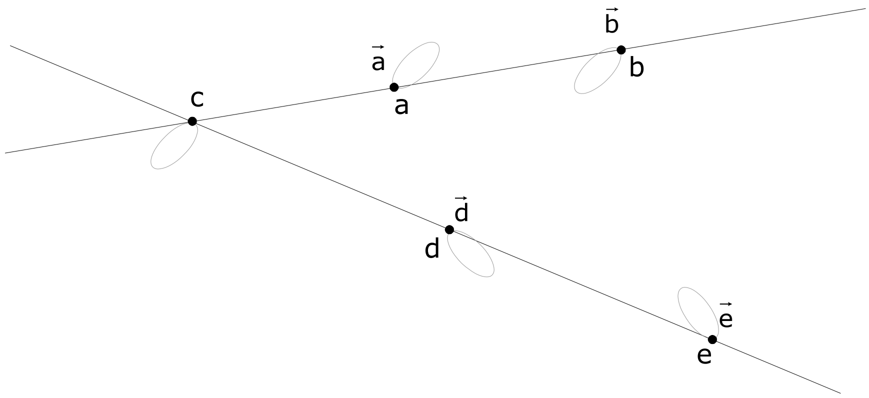


4. Bijzondere homothetieën

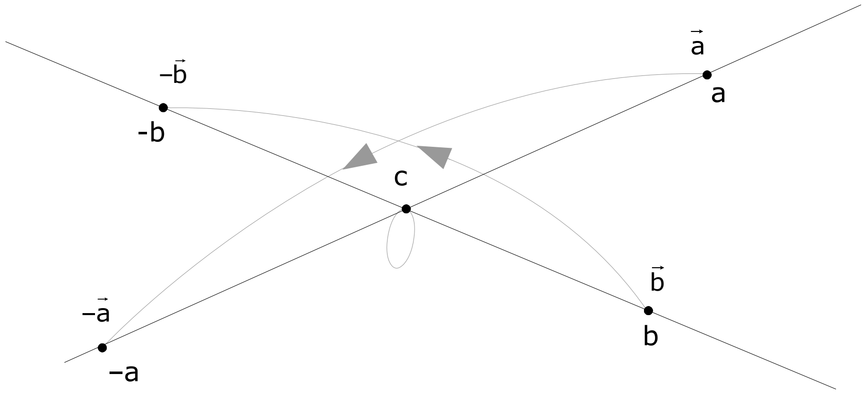
- Een homothetie h met centrum c en reële verhouding r gelijk aan nul noemt men de constante homothetie c.



- Elke constante homothetie is een constante transformatie van π.
- Elke homothetie h met centrum c en een reële verhouding verschillend van nul noemt men een niet-constante homothetie.
- Een homothetie h met centrum c en reële verhouding r gelijk aan 1 is de identieke transformatie 1_π.

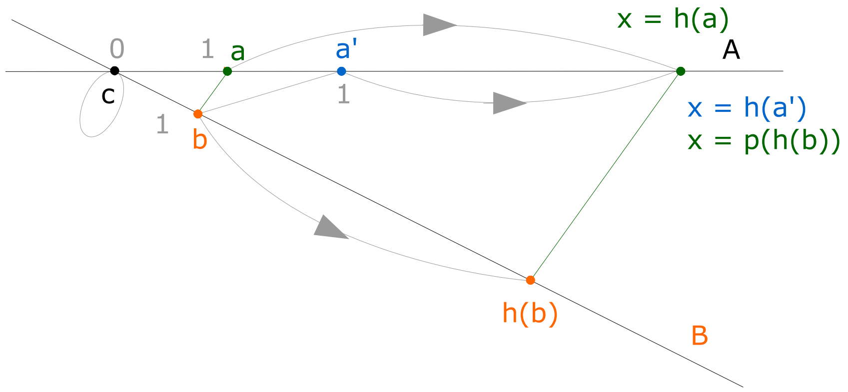


- Een homothetie h met centrum c en rationale verhouding q gelijk aan −1 is de puntspiegeling S_c. (zie hoofdstuk 12)



5. Elke niet-constante homothetie als permutatie van het vlak

- **Stelling:** Elke niet-constante homothetie is een permutatie van π.



Gegeven: homothetie h met centrum c en rationale verhouding q met $q \neq 0$.
Te bewijzen: h_c is een permutatie van π.
Bewijs: Een homothetie is een translatie van π (definitie homothetie)
$\Rightarrow$ elk punt van π heeft ten hoogste één beeld (definitie translatie)
Er dient dus enkel te worden bewezen dat ieder punt beeld is van één en slechts één punt.
constructie: Men construeert twee rechten A en B met snijpunt c en neemt een punt b en het beeld h(b) van b door de homothetie h_c.
$\Rightarrow$ abscis b = 1 **(1)** en abscis h(b) = q **(2)** (definitie homothetie)
constructie: Evenwijdige projectie volgens een richting niet evenwijdig met A en B van b en h(b) op A zodanig dat p(b) = a en p(h(b)) = x
uit **(1)** en **(2)** $\Rightarrow$ abscis a = 1 en abscis x = q **(3)** (stelling van Thales)
uit **(3)** $\Rightarrow$ x = h(a) (definitie homothetie)
beschouwing: stel x = h(a') met $a \neq a'$ **(4)**
$\Rightarrow$ abscis a' = 1 **(5)** (definitie homothetie)
uit **(3)** en **(5)** $\Rightarrow$ abscis a = abscis a' **(6)** (transitiviteit =)
uit **(6)** $\Rightarrow$ p(b) = a en p(b) = a' (stelling van Thales)
$\Rightarrow \exists\, ba \parallel h(b)x \Rightarrow \exists\, ba' \parallel h(b)x$
$\Rightarrow$ ba = ba' (axioma 4)
$\Rightarrow$ a = a' **(8)**
(8) is in tegenspraak met **(4)**, zodat elk punt door een niet-constante homothetie h met centrum c precies het beeld is van één en slechts één punt.
Besluit: elke niet-constante homothetie is een permutatie van het vlak π.

6. De invarianten van een niet-constante homothetie

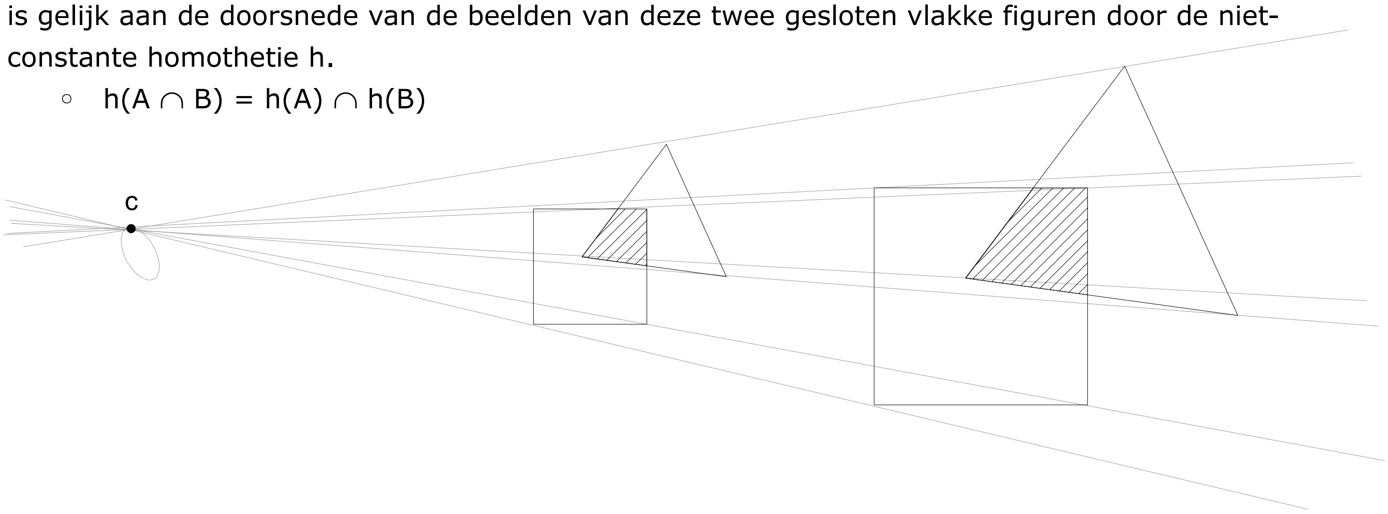
- Het beeld van een rechte door een niet-constante homothetie is een rechte.
- Het beeld van een halve rechte door een niet-constante homothetie is een halve rechte.
- Het beeld van een lijnstuk door een niet constante homothetie is een lijnstuk.
- Het beeld van twee evenwijdige rechten door een niet-constante homothetie zijn twee evenwijdige rechten.
- Het beeld van twee loodrecht op elkaar staande rechten door een niet-constante homothetie zijn twee loodrecht op elkaar staande rechten.
- De doorloopzin van een beeld van een vlakke figuur door een homothetie is gelijk aan de doorloopzin van de vlakke figuur.
- De zin van een koppel en zijn beeld door een niet-constante homothetie is
  - gelijk als de verhouding van de homothetie positief is,
  - omgekeerd als de verhouding van de homothetie negatief is.
- De aard van het beeld van een figuur door een niet-constante homothetie en de aard van de figuur zijn gelijk. (Aard = driehoek, vierkant, ruit, rechthoek, cirkel ...)

7. Omgekeerde van een homothetie

- **Definitie:** De omgekeerde relatie van een niet-constante homothetie is een niet-constante homothetie met zelfde centrum.
    - **Notatie:** h^{-1}
- De omgekeerde relatie van de constante homothetie is geen homothetie.
- Wanneer de omgekeerde relatie h^{-1} van een niet-constante homothetie h gelijk is aan h, dan is de homothetie ofwel de identieke transformatie ofwel een puntspiegeling.
- Wanneer de omgekeerde relatie h^{-1} van een niet-constante homothetie h gelijk is aan h, dan heeft de homothetie een gehele verhouding van ofwel 1 ofwel −1.

8. Het beeld van de doorsnede en de vereniging door een niet-constante homothetie

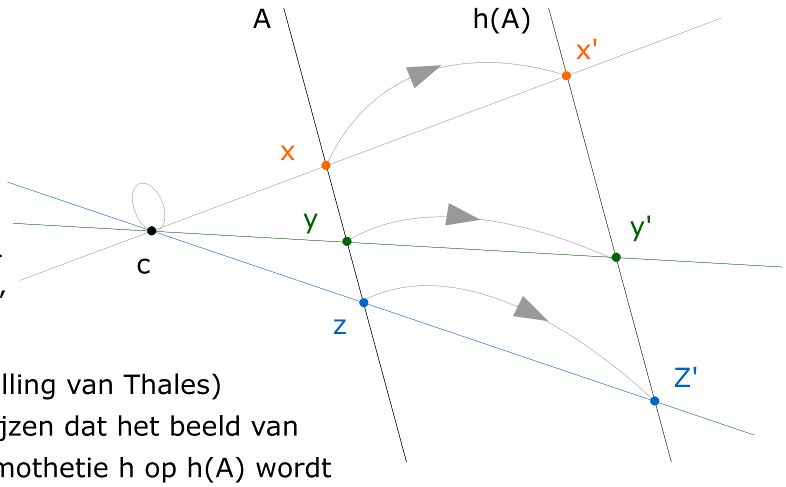
- Het beeld van de doorsnede van twee gesloten vlakke figuren door een niet-constante homothetie h is gelijk aan de doorsnede van de beelden van deze twee gesloten vlakke figuren door de niet-constante homothetie h.
    - $h(A \cap B) = h(A) \cap h(B)$



- Het beeld van de vereniging van twee gesloten vlakke figuren door een niet-constante homothetie h is gelijk aan de vereniging van de beelden van deze twee gesloten vlakke figuren door de niet-constante homothetie h.
    - $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$

9. Het beeld van een rechte door een niet-constante homothetie

- **Stelling:** Het beeld van een gegeven rechte door een niet-constante homothetie h is een rechte evenwijdig met de gegeven rechte.



Gegeven: h(c,q) en $q \neq 0$, $A \in \mathcal{R}$

Te bewijzen: $h(a) \parallel A$

Bewijs: **constructie:** men neemt een willekeurig punt x van A en construeert h(x) = x′.

$\Rightarrow$ abscis x = 1 **(1)** en abscis x′ = q **(2)**

constructie: men neemt een rechte door c die A in y snijdt en construeert h(y) = y′

$\Rightarrow$ abscis y = 1 **(3)** en abscis y′ = q **(4)**

(1), **(2)**, **(3)** en **(4)** $\Rightarrow xy \parallel x'y'$ **(5)** (stelling van Thales)

beschouwing: men dient nu nog te bewijzen dat het beeld van ieder willekeurig punt z van A door de homothetie h op h(A) wordt afgebeeld.

constructie: men neemt een rechte door c die A in z snijdt en construeert h(z) = z′

$\Rightarrow$ abscis z = 1 **(6)** en abscis z′ = q **(7)** (definitie homothetie)

(1), **(2)**, **(6)** en **(7)** $\Rightarrow xz \parallel x'z'$ **(8)** (stelling van Thales)

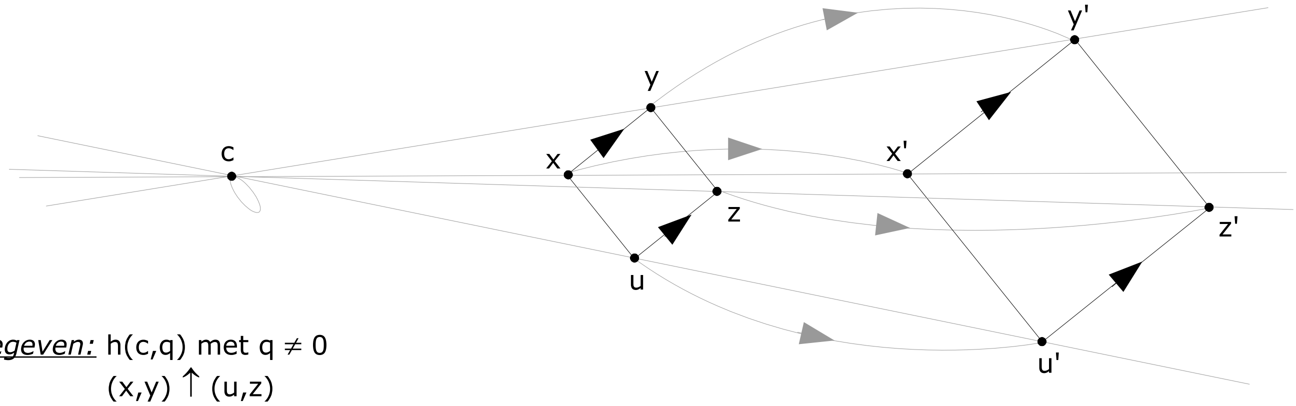
(5) en **(8)** $\Rightarrow x'y' \parallel x'z'$ (xy = xz en transitiviteit $\parallel$)

$\Rightarrow$ x′y′ = x′z′ (axioma 4, axioma van Euclides)

- **Gevolg 1:** Om een beeld van een rechte A door een niet-constante homothetie h te construeren volstaat het het beeld h(a) van één punt a van de rechte te construeren en daarna een rechte te construeren door h(a) evenwijdig met A.
- **Gevolg 2:** Het beeld van twee evenwijdige rechten door een niet-constante homothetie zijn twee evenwijdige rechten.
- **Stelling:** Elke niet-constante homothetie bewaart de evenwijdigheid.

10. Het beeld van equipollente koppels door een niet-constante homothetie

- **Stelling:** Het beeld van twee equipollente puntenkoppels door een niet-constante homothetie zijn twee equipollente puntenkoppels.



Gegeven: h(c,q) met $q \neq 0$
(x,y) ↑ (u,z)
h(x) = x′, h(y) = y′, h(u) = u′, h(z) = z′

Te bewijzen: (x′,y′) ↑ (u′,z′)

Bewijs: (x,y) ↑ (u,z)
⇓ (definitie ↑)
(x,y) ▱ (u,z)
⇓ (definitie ▱)
xy ∥ uz en xu ∥ yz
⇓
x′y′ ∥ u′z′ en x′u′ ∥ y′z′
⇓ (definitie ▱)
(x′,y′) ▱ (u′,z′)
⇓ (definitie ↑)
(x′,y′) ↑ (u′,z′)

- **Gevolg:** Het beeld van het midden van een koppel door een niet constante homothetie is het midden van het beeld van het koppel.
- **Stelling:** Elke homothetie bewaart het midden.

11. Het beeld van equipollente koppels door de constante homothetie

- Het beeld van twee equipollente puntenkoppels door de constante homothetie is gelijk aan de nulvector. De nulvector is het beeld van een vector door de constante homothetie.

12. De verzameling van alle homothetieën met zelfde centrum

- $\mathcal{H}_c$ of $\mathcal{H}$(c)= {homothetieën met centrum c}
- $\mathcal{H}^+_c$ = {positieve homothetieën met centrum c}
- $\mathcal{H}^-_c$ = {negatieve homothetieën met centrum c}
- $\mathcal{H}_c$ \ {c} of $\mathcal{H}_0$(c)= {niet-constante homothetieën met centrum c}

13. Het samenstellen van homothetieën met zelfde centrum

- Daar elke homothetie een relatie (transformatie) is, kan in de verzameling van de homothetieën met hetzelfde centrum de bewerking "samenstellen" of "∘" worden ingevoerd.
- Zijn h en k $\in \mathcal{H}_c$, dan kan men $k \circ h$ bepalen.
- De samengestelde van twee niet-constante homothetieën is een niet-constante homothetie.
- De samengestelde van een niet-constante homothetie met de constante homothetie is de constante homothetie. Men noemt de constante homothetie het opslorpend element van het samenstellen van homothetieën met zelfde centrum c.
- De samenstelling van twee homothetieën met zelfde centrum c is een homothetie met centrum c en een verhouding gelijk aan het product van de verhoudingen van de twee samenstellende homothetieën.

14. De commutatieve groep van de niet-constante homothetieën

- Voor elk tweetal homothetieën met centrum c is het steeds mogelijk de samengestelde homothetie te bepalen die eveneens c als centrum heeft. Het samenstellen van homothetieën is in de verzameling van homothetieën met zelfde centrum inwendig en overal gedefinieerd.
  - $\forall\, h,k \in \mathcal{H}_c : k \circ h \in \mathcal{H}_c$
- De samengestelde homothetie van enkele homothetieën met zelfde centrum blijft onveranderd wanneer men de volgorde waarin men de samenstellingen uitvoert, wijzigt. Dit noemt men de associatieve eigenschap van het samenstellen van homothetieën met zelfde centrum.
  - $\forall\, h,k,l \in \mathcal{H}_c : (l \circ k) \circ h = l \circ (k \circ h) = l \circ k \circ h$
- De identieke transformatie verandert niets aan de samengestelde homothetie, ongeacht of men de samenstelling links of rechts uitvoert. Men noemt de identieke transformatie, die eveneens een homothetie is, het neutraal element van het samenstellen van homothetieën met zelfde centrum.
  - $\forall\, h \in \mathcal{H}_c : \exists\, 1_\pi \in \mathcal{H}_c : k \circ 1_\pi = k = 1_\pi \circ h$
- Bij iedere niet-constante homothetie met centrum c hoort een andere niet-constante homothetie met zelfde centrum, namelijk de omgekeerde homothetie, waarbij de samengestelde van beide homothetieën het neutraal element van het samenstellen van homothetieën met zelfde centrum oplevert. Men noemt deze homothetie het symmetrisch element van het samenstellen van niet-constante homothetieën met zelfde centrum.
  - $\forall\, h \in \mathcal{H}_c \setminus \{c\} : \exists!\, h^{-1} \in \mathcal{H}_c \setminus \{c\} : h^{-1} \circ h = 1_\pi = h \circ h^{-1}$

  $\mathcal{H}_c \setminus \{c\}, \circ$ is een groep.
- De samengestelde van twee homothetieën met zelfde centrum blijft onveranderd wanneer men de homothetieën van plaats verwisselt. Dit noemt men de commutatieve eigenschap van de samenstelling van homothetieën met zelfde centrum.
  - $\forall\, h,k \in \mathcal{H}_c : k \circ h = h \circ k$

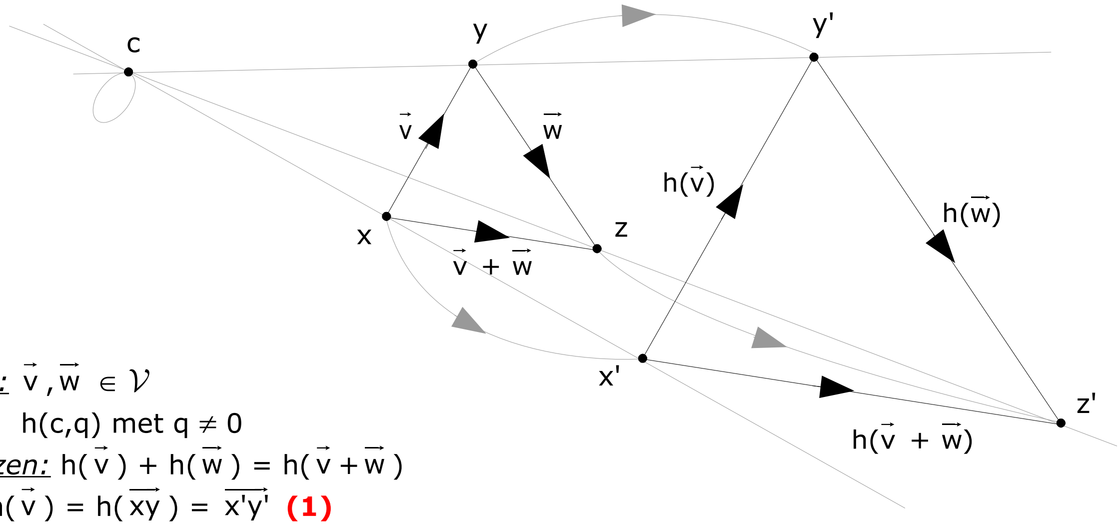
  $\mathcal{H}_c \setminus \{c\}, \circ$ is een commutatieve groep.

15. Teken van de verhouding van de samengestelde van twee homothetieën

- De samengestelde homothetie van twee positieve homothetieën met zelfde centrum is steeds een positieve homothetie.
- De samengestelde homothetie van twee negatieve homothetieën met zelfde centrum is steeds een positieve homothetie.
- De samengestelde homothetie van een positieve homothetie en een negatieve homothetie met zelfde centrum is een negatieve homothetie.

16. Het beeld van de som van twee vectoren door een niet-constante homothetie

- Het beeld van een vector door een homothetie is een vector.
- **Stelling:** Bij elke homothetie is het beeld van de som van twee vectoren gelijk aan de som van het beeld van deze twee vectoren.



Gegeven: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$

$h(c,q)$ met $q \neq 0$

Te bewijzen: $h(\vec{v}) + h(\vec{w}) = h(\vec{v} + \vec{w})$

Bewijs: $h(\vec{v}) = h(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{x'y'}$ **(1)**

$h(\vec{w}) = h(\overrightarrow{yz}) = \overrightarrow{y'z'}$ **(2)**

$h(\vec{v} + \vec{w}) = h(\overrightarrow{xz}) = \overrightarrow{x'z'}$ **(3)**

$\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (Chasles-Möbius)

$\overrightarrow{x'y'} + \overrightarrow{y'z'} = \overrightarrow{x'z'}$ (Chasles-Möbius) **(4)**

Substitutie van **(1)**, **(2)** en **(3)** in **(4)** $\Rightarrow h(\overrightarrow{xy}) + h(\overrightarrow{yz}) = h(\overrightarrow{xz})$

of $h(\vec{v}) + h(\vec{w}) = h(\vec{v} + \vec{w})$

17. Dilataties

- Een dilatatie van het vlak π is een permutatie van π die elke rechte van het vlak afbeeldt op een evenwijdige rechte.
- Een dilatatie is ofwel een niet-constante homothetie, ofwel een verschuiving.
- De samengestelde relatie van twee dilataties is opnieuw een dilatatie.
- De verzameling van dilataties vormt een niet-commutatieve groep t.o.v. het samenstellen van dilataties.